

# المصفوفات - معكوس المصفوفة - حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة

الوحدة النمطية الاولى

( ١ )

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

هيئة التعليم التقني

معهد الادارة التقني

## مادة الرياضيات

لطلبة المرحلة الاولى - قسم أنظمة الحاسبات

في معاهد هيئة التعليم التقني

اعداد وتصميم

وفاء كامل ابراهيم ال طه

## النظرة الشاملة

### الفئة المستهدفة

طلبة المرحلة الاولى/ قسم انظمة الحاسوب/ معهد ادارة التقني

### المبررات

صممت هذه الوحدة النمطية لتمكين الطالب من التعرف على المصفوفات - انواع المصفوفات - العمليات على المصفوفات - المحددات - معكوس المصفوفة وطرق ايجاده - حل المعادلات النمطية باستخدام معكوس المصفوفة.

### الفكرة المركزية

- تعريف المصفوفة
- انواع المصفوفة
- العمليات على المصفوفات
- المحددات
- معكوس المصفوفة
- طرق ايجاد معكوس المصفوفة
- حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة .

### التعليمات

- ادرس محتويات الوحدة النمطية جيداً .
- تعرف على اهداف الوحدة النمطية جيداً .
- اد الاختبار بشكل جيد .
- لاتحاول الاطلاع على مفاتيح الاجابة على الاختبار الا بعد تاديتها .
- قم باداء الاختبار القبلي .
- يحتوي الاختبار القبلي على ثلاث فقرات اختبارية .
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فأكثر فأنت لا تحتاج الى دراسة هذه الوحدة النمطية .
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فأقل فأنت لاتحتاج الى الاستمرار في دراسة هذه الوحدة النمطية .
- بعد دراستك للوحدة النمطية قم باداء الاختبار البعدي
- 🇲🇵 اذا حصلت على (٢) درجة فأكثر فانتقل الى دراسة الوحدة النمطية التالية .
- 🇲🇵 اذا حصلت على (٢) درجة فأقل فأننا نعلمك بحاجتك لدراسة هذه الوحدة النمطية .

## الاهداف الادائية

سيكون الطالب بعد انتهائه من دراسة هذه الوحدة النمطية قادرا على ان :

- يعرف المصفوفة
- يحدد انواع المصفوفات
- يطلع على العمليات على المصفوفات
- يتعرف على طريقة حساب المحددات
- يطلع على معكوس المصفوفة وطريقة ايجاده
- يتعرف على حل المعادلات الخطية باستخدام مكوس المصفوفات

## الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي:

- ١- ان رتبة المصفوفة عبارة عن:
  - أ- عدد الصفوف \* عدد الاعمدة
  - ب- عدد الاعمدة \* عدد الصفوف
- ٢- اذا كانت المصفوفة A من رتبة (mxn) فان رتبة مبدلة المصفوفة A هي:
  - أ-  $N \times m$
  - ب-  $N \times n$
  - ج-  $M \times m$
- ٣- المصفوفة الشاذة هي المصفوفة التي قيمة المحددة لها:
  - أ- اكبر من صفر
  - ب- تساوي من صفر
  - ج- اصغر من صفر

## ملاحظة

- لكل سؤال درجة واحدة
- اذا حصلت على (٢) درجة فأكثر فانت لا تحتاج الى دراسة هذه الوحدة النمطية . انتقل الى الوحدة النمطية التالية .
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت لا تحتاج الى دراسة هذه الوحدة النمطية .
- تحقق من اجابتك بمراجعة صغة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات ) في نهاية الوحدة النمطية .

## عرض الوحدة النمطية

### Matrix المصفوفة

ان مفهوم المصفوفة من المفاهيم الرياضية المهمة حيث تستخدم في مجالات عديدة منها البرمجة الخطية وحل أنظمة المعادلات الخطية والاحصاء الجبر الخطي وغير ذلك .

تعرف المصفوفة : ه انها مجموعة اعداد مرتبة في صفوف (rows) واعمدة (columns) كما في الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

M — تمثل عدد الصفوف ، n — تمثل عدد الاعمدة

$$\text{// مثال //} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Order of matrix

#### رتبة المصفوفة

لتكن (A) مصفوفة تحتوي على (M) من الصفوف و (N) من الاعمدة فان رتبة المصفوفة ستكون (MXN)

Determine the order of the following / مثال  
المصفوفات matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ The order } 2 \times 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \\ 5 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ The order } 4 \times 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 0 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ The order } 3 \times 3$$

### المصفوفة التربيعية (المربعة) :- SQUARE MATRIX

لتكن (A) مصفوفة ذات مرتبة (MXN) فإذا كانت (M=N) أي أن عدد الصفوف  
يساوي عدد الأعمدة فيقال عن المصفوفة (A) بأنها مصفوفة تربيعية أو مصفوفة  
مربعة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

(A) is square matrix  
of order  $2 \times 2$

## المصفوفة الصفرية Zero Matrix

هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفار

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ The order } 3 \times 2$$
$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ The order } 2 \times 2$$

## المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

هي المصفوفة التربيعية التي تكون عناصرها التي لاتقع على القطر الرئيسي عبارة عن اصفار

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ order } 3 \times 3$$

يجب ان تكون تربيعية

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ order } 3 \times 3$$

مصفوفة قطرية

## المصفوفة الاحادية (الوحدة) Unit Matrix

وهي المصفوفة التي القطرية التي تكون كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي يساوي (واحد) ويرمز لها بالرمز (In)

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ } 3 \times 3$$

مصفوفة قطرية احادية

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ } 2 \times 2$$

## مبدلة المصفوفة Transpos of Matrix

إذا كانت (A) مصفوفة ذات رتبة (mxn) فيمكن إيجاد مبدلة المصفوفة والتي نرمز لها بالرمز (A<sup>T</sup>) أو (A<sup>-</sup>) وتكون مرتبة مبدلة المصفوفة (nxm) ونحصل عليها من ابدال الصفوف محل الاعمدة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -8 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ order } 2 \times 3$$
$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \text{ order } 3 \times 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ order } 3 \times 3$$
$$A^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ order } 3 \times 3$$

## المصفوفة المتماثلة Symmetric Matrix

يقال عن المصفوفة (A) بانها مصفوفة متماثلة اذا كانت تساوي مبدلتها اي ان (A<sup>T</sup>=A) او (A=A<sup>-</sup>)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} 3 \times 3$$
$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} 3 \times 3$$

$\therefore A = A^T$  A is symmetric matrix.

## المصفوفة المتساوية Equal Matrix

إذا كانت ( A ) مصفوفة ذات رتبة ( mxn ) و ( B ) مصفوفة أخرى ذات رتبة ( mxn ) أيضا فيقال ان المصفوفتين متساويتان إذا كانت عناصرها المتناظرة متساوية

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ order } 2 \times 2$$
$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{4}} & \sqrt{9} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ order } 2 \times 2$$
$$\therefore A = B$$

## جمع وطرح المصفوفات

يمكن جمع المصفوفتين ذات نفس الرتبة وذلك بجمع عناصرهما المتناظرة ونفس الشيء في حالة عملية الطرح

$$\text{Let } X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ } 2 \times 3$$
$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ } 2 \times 3$$

find  $X + Y$  ,  $X - Y$

$$X + Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & -8 \end{bmatrix} \text{ } 2 \times 3$$

$$X - Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -8 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ } 2 \times 3$$

## ضرب المصفوفة بكمية ثابتة

يمكن ضرب المصفوفة بكمية ثابتة وذلك من خلال ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بتلك الكمية الثابتة

$$\begin{aligned} \text{Let } A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{Find } 3A &? \\ 3A &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 3 \\ 21 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## ضرب المصفوفات

لنفرض اننا نريد ضرب مصفوفة (A) بالمصفوفة (B) ووضع الناتج بالمصفوفة (C) اي ان  $(A*B=C)$  فيقال ان المصفوفتين (A و B) يمكن ضربهما اذا كانت عدد اعمدة المصفوفة الاولى (A) تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية (B) علما ان المصفوفة الناتجة (C) يكون عدد صفوفها مساوي لعدد صفوف المصفوفة الاولى (A) وعدد اعمدتها مساوي لعدد اعمدة المصفوفة الثانية (B) وان كل عنصر من عناصرها والذي نرمز له بالرمز  $(C_{ij})$  يمكن الحصول عليه من حاصل ضرب الصف (i) من المصفوفة الاولى (A) في العمود (j) من المصفوفة الثانية (B)

$$\begin{aligned} \text{Ex 80} \quad \text{Let } A &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{Find } AB \text{ and } BA \text{ if possible.} \\ AB &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -10 & 37 \\ 7 & -9 & 29 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 3 \\ \uparrow \text{متساوية} \end{matrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} 2 \times 3 & 2 \times 2 \\ \uparrow \text{غير متساوية} \end{matrix} \\ &\quad \text{لا يمكن إجراء عملية الضرب BA} \end{aligned}$$

EX Find the value of  $A^2 + 5A + 3I_2$  if  $A$  is a matrix such that

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} 2 \times 2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5A = 5 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3I_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & A^2 + 5A + 3I_2 \\ & \begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 56 & 27 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## المحددات Determinants

لتكن  $A$  مصفوفة ذات رتبة  $2 \times 2$  حين اذن نعرف قيمة المحددة للمصفوفة  $A$  والذي

$$|A| = ad - bc, \quad \text{نرمز لها بالرمز } |A|$$

$$\begin{aligned} \text{if } A &= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ |A| &= 7(5) - (-1)(0) \\ &= 35 + 0 \\ &= 35 \end{aligned}$$

قيمة المحددة لا يمكن ايجادها الا اذا كانت المصفوفة تربيعية  $2 \times 2$

بالامكان ايجاد قيمة المحدد بطريقة عامة مهما كانت رتبة المصفوفة ذلك باستخدام طريقة العوامل المتممة (Cofactors) وتتمثل هذه الطريقة باختيار صف او

عمود من المصفوفة وضرب كل عنصر من عناصره بالعامل المتمم له وبالتالي فان قيمة المحدد بتساوي مجموع نواتج الضرب علما بان العاقل المتمم والذي نرسم له بالرمز  $A_{ij}$  يمكن الحصول عليه من خلال مايلي

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$|A| = \sum a_{ij} A_{ij}$$

حيث ان المصفوفة  $M_{ij}$  هي المصفوفة المتبقية بعد حذف الصف والعمود  $i$  من المصفوفة  $A$

Find  $|A|$  by using cofactor method if you know that:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هذه مصفوفة من الرتبة  $3 \times 3$  (الرتبة الثالثة)

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(6 \times 1 - 1 \times 0) - 7(3 \times 1 - 0 \times 2) + 8(3 \times 1 - 6 \times 2)$$

$$= 30 - 21 - 72$$

$$= 30 - 93$$

$$|A| = -63$$

## المصفوفة الشاذة: Singular Matrix

هي المصفوفة التربيعية التي قيمة المحددة لها تساوي (صفر)

EX:- Show that the following matrix singular or not.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(0 \times 8 - 6 \times 1) - 3(3 \times 8 - 1 \times 4) + 4(3 \times 6 - 0 \times 4)$$

$$|A| = -12 - 60 + 72$$

$$|A| = -72 + 72 = |A| = 0$$

## المصفوفة المرافقة: Adjoint Matrix

لتكن (A) مصفوفة مصفوفة المرافقة ل (A) ويرمز لها بالرمز (adj A) .

إذا كان عنصرها في الصف (i) العمود (j) يمثل العامل المتمم للعنصر بالصف (j) والعمود (i) للمصفوفة (A) .

EX:- find adj A for the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

Sol

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = + (6 - 0) = 6 \rightarrow (-1)^2 = +1$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = - (0 - 28) = 28$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = + (0 - 12) = -12$$

$$\begin{aligned}
 x_{21} &= (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4+0) = -4 \\
 x_{22} &= (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = +(-2+20) = 18 \\
 x_{23} &= (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = +8 \\
 x_{31} &= (-1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = + (14+15) = 29 \\
 x_{32} &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -(-7+0) = 7 \\
 x_{33} &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = +(-3-0) = -3 \\
 \text{adj } A &= \begin{bmatrix} 6 & -4 & 29 \\ 28 & 18 & 7 \\ -12 & 8 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## معكوس المصفوفة Invers of matrix

لتكن (A) مصفوفة تربيعية او مربعة ذات رتبة  $n \times n$  قابلة للعكس اذا وجدت مصفوفة مربعة (B) بحيث ان  $AB=BA=I_n$  ويرمز لمعكوس المصفوفة A يقرأ A invers ويمكن ان يستخرج من القانون التالي.

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A \\
 |A| &\neq 0 \quad \text{بشرط} \\
 \text{Ex so find } A^{-1} \text{ (invers of A) for the Matrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 \text{Sol} \\
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A \\
 |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\
 |A| &= 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 |A| &= 10 - 1 \quad |A| = 9
 \end{aligned}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = +4$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

## #استخدام معكوس المصفوفة في حل المعادلات الخطية:-

١- في حالة عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل (المتغيرات) في هذه الحالة نستخدم القانون التالي لحل المعادلات

$$X = A^{-1} B$$

حيث ان  $X$  تمثل قيمة المتغيرات ( المجاهيل )

$A$  تمثل مصفوفة المعادلات

$B$  تمثل متجه القيم المطلقة (الثوابت)

Ex: Solve the following system of equations by using the inverse of matrix:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Sol  $X = A^{-1} B$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$|A| = 8 + 27 + 1 - 6 - 6 - 6$   
 $= 36 - 18 = 18$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1) - 3(-7) + 1(-5)$$

$$= 2 + 21 - 5$$

$$|A| = 18$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$3 \times 3$    also    $3 \times 1$

$$= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{18} \\ \frac{29}{18} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{35}{18}$$

$$x_2 = \frac{29}{18}$$

$$x_3 = \frac{5}{18}$$

٢- في حالة عدد المعادلات اكبر من عدد المتغيرات (المجاهيل)

لحل المعادلات نستخدم القانون التالي:-

$$X = (A' A)^{-1} A' B$$

حيث ان  $X$  تمثل متجه المتغيرات

$A$  تمثل مصفوفة المعاملات

$B$  تمثل متجه القيم المطلقة

$(A^{-1})$  تمثل مبدلة المصفوفة  $A$

Ex :- solve the following system of equations by using the Inverse of matrix :-

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 0 \\ 2X_1 + 3X_2 &= -1 \\ 3X_1 + 2X_2 &= 1 \\ X_1 - X_2 &= 2 \\ 3X_1 + 5X_2 &= -2 \end{aligned}$$

بما ان عدد المعادلات اكبر من عدد المتغيرات لذلك نستخدم القانون التالي في حل المعادلات

Sol

$$X = (A' A)^{-1} A' B$$
$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A'A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 27 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}$$

$2 \times 5$        $5 \times 2$

$$(A'A)^{-1} = \frac{1}{|A'A|} \text{adj}(A'A)$$

$$|A'A| = \begin{vmatrix} 24 & 27 \\ 27 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= 24(40) - 27(27) \\ = 231$$

$$\text{adj}(A'A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} |40| = 40$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} |27| = -27$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} |27| = -27$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} |24| = 24$$

$$(A'A)^{-1} = \frac{1}{231} \begin{bmatrix} 40 & -27 \\ -27 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A'B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$2 \times 5$        $5 \times 1$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$X = (A'A)^{-1} A'B$$

$$= \frac{1}{231} \begin{bmatrix} 40 & -27 \\ -27 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore X_1 = 1, \quad X_2 = -1$$

## الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مماياتي

١- اذا كانت المصفوفة A من رتبة (MxN) فان رتبة مبدلة المصفوفة هي:-

أ-  $N \times N$

ب-  $M \times N$

ج-  $M \times M$

٢- ان رتبة المصفوفة عبارة عن :-

أ- عدد الصفوف  $\times$  عدد الاعمدة

ب- عدد الاعمدة  $\times$  عدد الصفوف

٣- المصفوفة الشاذة هي المصفوفة التي قيمة المحدد لها :-

أ- اكبر من صفر

ب- اصغر من صفر

ج-تساوي صفر

## ملاحظة :-

### - لكل سؤال درجة واحدة

- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثّر فانت لاحتّاج الى دراسة الوحدة النمطية انتقل الى الوحدة التالية .
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقّل فانت تحتّاج الى دراسة هذه الوحدة النمطية .

- تحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة ( مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة النمطية .

## المصادر والمراجع:

١- الرياضيات – طرق عددية – تأليف: د. علي سيفي سرمد زكو

٢- اسس الرياضيات- تأليف : د. هادي جابر مصطفى

د.رياض شاكر نعيم

د.نادر جورج منصور

٣- الرياضيات الحديثة – تأليف : د. عبد الفتاح الشرقاوي

د.محمود زناتي

د.نبیه عبد الفقار

د.احمد فرغلي

## مفاتيح الاجابات على الاختبارات

الاختبار القبلي	الاختبار البعدي
١ - أ	١ - ب
٢ - أ	٢ - أ
٣ - ب	٣ - ج