

# الدوال وأنواعها ومشتقاتها والتفاضل

الوحدة النمطية الثانية

( ٢ )

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

هيئة التعليم التقني

معهد الادارة التقني

مادة الرياضيات

لطلبة المرحلة الاولى اقسام أنظمة الحاسبات

في معاهد هيئة التعليم التقني

اعداد وتصميم

وفاء كامل ابراهيم ال طه

## النظرة الشاملة

### الفئة المستهدفة :-

طلبة المرحلة الاولى \قسم انظمة الحاسوب \معهد الادارة التقني

### المبررات:-

صممت هذه الوحدة لتمكين الطالب من التعرف على الدوال الخطية والمثلثية ومشتقاتهما والدوال الاسية واللوغارتمية ومشتقاتهما-التفاضل الجزئي والتفاضل الضمني

### الفكرة المركزية :-

- الدالة الخطية و مشتقتها
- الدوال الاسية ومشتقاتها
- الدوال اللوغارتمية ومشتقاتها
- الدوال المثلثية ومشتقاتها
- التفاضل الجزئي
- التفاضل الضمني

## التعليمات:-

- ادرس الوحدة النمطية جيدا
- تعرف على اهداف الوحدة النمطية جيدا
- اد الاختبار بشكل جيد
- لاتحاول الاطلاع على مفاتيح الاجابة على الاختبار الا بعد تاديتها
- قم باداء الاختبار القبلي
- يحتوى الاختبار القبلي على ثلاث فقرات اختبارية
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت لاتحتاج الى دراسة هذه الوحدة النمطية
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت تحتاج الى الاستمرار في دراسة هذه الوحدة النمطية
- بعد دراستك للوحدة النمطية قم باداء الاختبار البعدي
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فاننقل الى دراسة الوحدة النمطية التالية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فاننا نعلمك بحاجتك لدراسة هذه الوحدة النمطية

## الاهداف الادائية :-

سيكون الطالب قادرا على ان يتعرف على

- الدالة الخطيه و مشتقتها
- الدوال الاسية ومشتقاتها
- الدوال اللوغارتمية ومشتقاتها
- الدوال المثلثية ومشتقاتها
- التفاضل الجزئي
- التفاضل الضمني

## الاختبار القبلي :-

ضع دائرة حول احرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي:-

١- مشتقة الكمية الثابتة تساوي

أ- اكبر من صفر

ب- اصغر من صفر

ج- تساوي صفر

٢- اذا كانت  $y = \cos f(x)$  فان  $y'$  تساوي

أ-  $-\sin f(x) \cdot f'(x)$

ب-  $\sec^2 f(x) \cdot f'(x)$

ج-  $\sec f(x) \cdot \tan f(x) \cdot f'(x)$

٣- اذا كانت  $y = \cot^{-1}u$  فان  $y'$  تساوي

أ-  $\frac{-1}{1+u^2} \frac{dy}{dx}$

ب -  $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{dy}{dx}$

ج -  $\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{dy}{dx}$

ملاحظة :-

❖ لكل سؤال درجة واحدة

■ اذا حصلت على (٢) درجة فاكثّر فانتقل الى دراسة الوحدة النمطية التالية

❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاقبل فاننا نعلمك بحاجتك لدراسة هذه الوحدة النمطية

❖ تحقق من سلامة اجاباتك بمراجعة صفحة مفاتيح الاجابة على

الاختبارات في نهاية الوحدة النمطية

### عرض الوحدة النمطية :-

#### التفاضل (المشتقة) Differentiation

المشتقة للدالة  $F(x)$  هي دالة ايضا يرمز لها بالرمز  $F'(x)$  بحيث ان قيمتها في كل عدد  $(x)$  يحدد بالغاية التالية

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

بحيث ان تكون الغاية موجودة وهنالك رموز اخرى تستخدم للتعبير عن مشتقة دالة  $y=F(x)$

وهذه الرموز هي  $\frac{dy}{dx}$ ,  $F'(x)$ ,  $y'$

### قوانين المشتقة

## الدالة

①  $y = a$  دالة ثابتة

②  $y = a f(x)$

③  $y = [f(x)]^n$

④  $y = f(x) \mp g(x)$

⑤  $y = f(x) \cdot g(x)$

⑥  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

## المشتقة

مضروبة  $\bar{y} = \frac{dy}{dx} = 0$

دالة ثابتة في حالة  $\frac{dy}{dx} = a \frac{d}{dx} f(x)$

$\frac{dy}{dx} = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x) \mp g'(x)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ex: find  $\frac{dy}{dx}$  for the following functions

①  $y = 7$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

②  $y = 7x$

$$\frac{dy}{dx} = 7$$

③  $y = 7x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 7(2)x^{2-1} = 14x$$

④  $y = 4x^5 + 8x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 24x^2$$

⑤  $y = (5x^2 + 1)(3x^4 - 8)$

$$\frac{dy}{dx} = (5x^2 + 1)(12x^3) + (3x^4 - 8)(10x)$$

$$= 60x^5 + 12x^3 + 30x^5 - 80x$$

$$\frac{dy}{dx} = 90x^5 + 12x^3 - 80x$$



$$(6) y = \frac{3x^4 + 7x - 1}{5x^6 - 8x^2 + 3}$$

(القاسم)
القاسم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x^6 - 8x^2 + 3)(12x^3 + 7) - (3x^4 + 7x - 1)(30x^5 - 16x)}{[5x^6 - 8x^2 + 3]^2}$$

مشتقة الدالة المركبة :-

$$\frac{dy}{dx}$$

في بعض الاحيان يكون المطلوب ايجاد المشتقة

ولا يرتبط  $x$  بالمتغير  $y$  مباشرة في نفس المعادلة وانما هنالك متغير ثالث يربط بينهما في هذه الحالة يمكن ايجاد المشتقة باستخدام دالة الدالة اي ان :-

$$y = f(u), u = f(x)$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ex 800  $\frac{dy}{dx}$

$$y = 5u^3 - 7u^2 + 8u + 3$$

$$u = 5x^7 + 8x^4$$

Sol

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 15u^2 - 14u + 8$$

$$\frac{du}{dx} = 35x^6 + 32x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = (15u^2 - 14u + 8)(35x^6 + 32x^3)$$

$$= [15(5x^7 + 8x^4)^2 - 14(5x^7 + 8x^4) + 8][35x^6 + 32x^3]$$

### مشتقة الدالة الضمنية :-

في بعض الاحيان تصادفنا علاقات ومعادلات تتضمن متغيرين او اكثر حيث يصعب التعبير عن احد المتغيرات بدلالة المتغيرات الاخرى مباشرة ولهذا السبب يطلق على هذه المعادلات بالدوال الضمنية ولذلك عند ايجاد المشتقة  $\frac{dy}{dx}$  لدالة

ضمنية تعتبر  $y$  دالة الى  $x$  ونطبق قواعد المشتقة

### خطوات المشتقة الضمنية

١- اشتقاق كل حد حسب موقعه في السؤال

٢- نضع الحدود الذي يحتوي على المشتقة  $\frac{dy}{dx}$  بطرف في المعادلة والحدود الخالية في المشتقة بالطرف الاخر

٣- استخراج المشتقة  $\frac{dy}{dx}$  كعامل مشترك

٤- قسمة طرفي المعادلة على المشتقة  $\frac{dy}{dx}$

$$\text{Ex 20} \quad \frac{dy}{dx}$$

$$5y^2 + 4x^2 - 2xy + 10x = 15$$

$$10y \frac{dy}{dx} + 8x - 2 \left[ x \frac{dy}{dx} + y \right] + 10 = 0$$

$$10y \frac{dy}{dx} + 8x - 2x \frac{dy}{dx} - 2y + 10 = 0$$

$$10y \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} = -8x + 2y - 10$$

$$\frac{dy}{dx} [10y - 2x] = -8x + 2y - 10$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x + 2y - 10}{10y - 2x}$$

### الدالة الاسية

هناك نوعان من الدالة الاسية

-١

$$y = e^{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

-٢

$$y = a^{f(x)}$$

اكتب ثابتة  $a$  لوغاريتم  $\ln(a)$

$$\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot \ln(a)$$

Ex: find  $\frac{dy}{dx}$  for the following functions.

$$y = e^{x^3 + 8x - 7}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3 + 8x - 7} (3x^2 + 8)$$

$$y = 5^{7x^4 + 3x^2 + 5x - 10}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{7x^4 + 3x^2 + 5x - 10} (28x^3 + 6x + 5) \cdot \ln(5)$$



## الدالة اللوغارتمية

### ١- دالة اللوغاريتم الطبيعي

$$y = \ln f(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

### ٢- مشتقة اللوغاريتم الاعتيادي

$$y = \log_a f(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

a = كمية ثابتة

Exo Find  $\frac{dy}{dx}$  for the following fun

①  $y = \ln(x^3 + 4x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 + 4x} \cdot (3x^2 + 4)$$

②  $y = \log_8(7x^2 + 8x - 12)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7x^2 + 8x - 12} \cdot (14x + 8) \cdot \frac{1}{\ln(8)}$$

## مشتقة الدوال المثلثية

الدوال

$$① y = \sin f(x) \quad \text{جـ}$$

$$② y = \cos f(x) \quad \text{جـ}$$

$$③ y = \tan(fx) \quad \text{كـ}$$

$$④ y = \cot f(x) \quad \text{كـ}$$

$$⑤ y = \sec f(x) \quad \text{قـ}$$

$$⑥ y = \csc f(x) \quad \text{قـ}$$

المشتقات

$$① \frac{dy}{dx} = \cos f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$$② \frac{dy}{dx} = -\sin f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$$③ \frac{dy}{dx} = \sec^2 f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$$④ \frac{dy}{dx} = -\csc^2 f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$$⑤ \frac{dy}{dx} = \sec f(x) \cdot \tan f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$$⑥ \frac{dy}{dx} = -\csc f(x) \cdot \cot f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$$



## مشتقة الدوال المثلثية المعكوسة

الدالة	المشتقة
① $y = \sin^{-1} u$ جا	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
② $y = \cos^{-1} u$ جتا	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
③ $y = \tan^{-1} u$ ظل	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
④ $y = \cot^{-1} u$ ظلّ	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
⑤ $y = \sec^{-1} u$ قس	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
⑥ $y = \csc^{-1} u$ قسّ	$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

EX: Find  $\frac{dy}{dx}$  For the Following Functions:

①  $y = \cos^{-1} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \right)$

$y = \cos^{-1} \left( \frac{x^2}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} \right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} \right)^2}} \cdot \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}(2x) - x^2 \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\left( (x+1)^{\frac{1}{2}} \right)^2}$

## التفاضل الجزئي Partial Derivatives

إذا كانت  $y = f(x, z)$  فان المشتقة الجزئية الاولى ل  $y$  بالنسبة ل  $x$  على

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

فرض ان  $z$  كمية ثابتة ونرمز لها بالرمز  $\frac{\partial y}{\partial x}$

والمشتقة الجزئية الاولى ل  $y$  بالنسبة ل  $z$  على فرض ان  $x$  كمية ثابتة نرمز لها

$$\frac{\partial y}{\partial z}$$

بالرمز  $\frac{\partial y}{\partial z}$

اما المشتقة الجزئية الثانية ل  $y$  بالنسبة ل  $x$  على فرض ان  $z$  كمية ثابتة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

نرمز لها بالرمز  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

والمشتقة الجزئية الثانية ل  $y$  بالنسبة ل  $z$  على فرض ان  $x$  كمية ثابتة نرمز لها

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$$

بالرمز  $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$

Ex: For the following Function:

$$y = x^3 + 5x \ln z + z e^{x^2} + \sqrt{z}$$

Find

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$$

الحل

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{\text{المشتقة الجزئية الثانية ل } z} = 3x^2 + 5 - 0 + z e^{x^2} (2x) + 0$$
$$= 3x^2 + 5 + 2xz e^{x^2}$$

$$\text{[مشتق } x \text{]} \frac{\partial y}{\partial z} = 0 + 0 - \frac{1}{z} + ex^2 + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{z} + ex^2 + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{[مشتق } z \text{]} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x + 0 + 2z [xe^{x^2}(2x) + e^{x^2}(1)]$$

$$= 6x + 4ze^{x^2} + 2ze^{x^2}$$

$$\text{[مشتق } x \text{]} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = z^{-2} + 0 - \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}}$$

$$= z^{-2} - \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}}$$

$u = x^2$   
 $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\text{[مشتق } x \text{]} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0 + 0 + \cancel{2xe^{x^2}} + 2xe^{x^2}$$

$$= 2xe^{x^2}$$

$du = 2x$

$$\text{[مشتق } z \text{]} \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = e^{x^2}(2x)$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$$



### الاختبار البعدي

ضع دائرة حول احرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي:-

١ - مشتقة الكمية الثابتة تساوي

أ- اكبر من صفر

ب- اصغر من صفر

ج- تساوي صفر

٢- اذا كانت  $y = \cot^{-1}u$  فان  $y$  تساوي

أ -  $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{dy}{dx}$

ب -  $\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{dy}{dx}$

ج -  $\frac{-1}{1+u^2} \frac{dy}{dx}$

٣- اذا كانت  $y = \cos f(x)$  فان  $y$  تساوي

أ -  $-\sin f(x) \cdot f'(x)$

ب -  $\sec^2 f(x) \cdot f'(x)$

ج -  $\sec f(x) \cdot \tan f(x) \cdot f'(x)$

## ملاحظة :-

❖ لكل سؤال درجة واحدة

■ اذا حصلت على (٢) درجة فاكثُر فانتقل الى دراسة الوحدة النمطية التالية

❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاقِل فاننا نعلمك بحاجتك لدراسة هذه الوحدة النمطية

❖ تحقق من سلامة اجاباتك بمراجعة صفحة مفاتيح الاجابة على

الاختبارات في نهاية الوحدة النمطية

## المصادر والمراجع

١ - الرياضيات - طرق عددية - تأليف : د. علي سيفي

سرمد زكو

٢ - اسس الرياضيات - تأليف : د. هادي جابر مصطفى

د. رياض شاكر نعم

د. نادر جورج منصور

٣ - الرياضيات الحديثة - تأليف : عبد الفتاح الشرقاوي

محمود زناتي

نبيه عبد الغفار

احمد فرغلي

## مفاتيح الاجابات على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
١	ج	١	ب
٢	أ	٢	ج
٣	أ	٣	أ