التكامل

الوحدة النمطية الرابعة

(٤)

اعداد وتصميم

وفاء كامل ابراهيم ال طه

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

هيئة التعليم التقني

معهد الادارة التقني

مادة الرياضيات

لطلبة المرحلة الاولى \قسم انظمة الحاسبات

في معاهد هيئة التعليم التقني

النظرة الشاملة

الفئة المستهدفة

طلبة المرحلة الاولى/قسم انظمة الحاسوب /معهد الادارة التقني

المبررات

صممت هذه الوحدة النمطية لتمكين الطاب من التعرف عللى التكامل غير المحدود والتكامل المحدود للدوال الخطية والاسمية واللوغاريميتية – طريقة التكامل بالتجزئة – التكامل العددي (طريقة سمبسون)

الفكرة المركزية

- التكامل غير المحدود للدوال الخطية والاسميو واللوغاريميتية.
- التكامل المحدود.
- طريقة التكامل بالتجزئة .
- التكامل العددي (طريقة سمبسون).

التعليمات

- ادرس محتويات الوحدة النمطية جيدا
- تعرف على اهداف الوحدة النمطية جيدا
- اد الاختبار بشكل جيد
- لاتحاول الاطلاع على مفاتيح الاجابة على الاختبار الابعد تاديتها
- قم باداء الاختبار القبلي
- يحتوي الاختبار القبلي على ثلاث فقرات اختبارية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت تحتاج الى درارسة هذه الوحدة النمطية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت لاتحتاج الى الاستمرار في دراسة هذه الوحدة النمطية
- بعد دراستك للوحدة النمطية قم باداء لاختبار البعدي
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانتقل الى دراسة الوحدة النمطية التالية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فاننا نعلمك بحاجتك لدراسة هذه الوحدة النمطية

الاهداف الادائية

سيكون الطالب بعد انتهائه من دراسة هذه الوحدة النمطية قادرا على ان:

- يتعرف على التكامل غير المحدود للدوال الخطية والاسمية واللوغاريميتية.
- يتعرف على التكامل المحدود.
- يطلع على طريقة التكامل بالتجزئة .
- يطلع على التكامل العددي (طريقة سمبسون).

الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما يتي:

١ – ان التكامل الدالة $Sx^m dx$ هو:

أ – $\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$

ب – $\frac{x^{m-1}}{m-1} + c$

ج – $\frac{x^m}{m} + c$

٢ – ان قيمة التكامل المحدود التالي : $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ تساوي:

أ – تساوي صفر

ب - تساوي∞

ج – تساوي واحد

٣ – ان قانون التكامل بالتجزئة هو :

أ- $\int sudv = u.v - \int svdu$

ب- $\int sudv = u.v - \int sudv$

ملاحظة :-

- ❖ لكل سؤال درجة واحدة
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت لاتحتاج الى دراسة هذة الوحدة النمطية انتقل الى الوحدة النمطية اللاحقة .
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت تحتاج الى الاستمرار في دراسة هذة الوحدة النمطية
- ❖ تحقق من اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة النمطية

عرض الوحدة النمطية

التكامل Integration

هو عملية ايجاد عكس المشتقة (عكس التفاضل) اي ايجاد الدالة الاصلية من خلال مشتقتها

ويستعمل الرمز $\int F(x)dx$ للتعبير عن تكامل الدالة F(x) بانسبة للمتغيرx

قوانين التكامل

١) $\int adx = ax + c$

٢) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ 1-≠m

٣) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

٤) $\int e^{f(x)} f^{-}(x) dx = e^{f(x)} + c$

٥) $\int \sin f(x) f^{-} dx = \cos f(x) + c$

٦) $\int \cos f(x) f^{-} dx = \sin f(x) + c$

٧) $\int \sec^2 f(x) f^{-} dx = \tan f(x) + c$

٨) $\int \csc^2 f(x) f^{-}(x) dx = \cot f(x) + c$

٩) $\int sec\, f(x).tan\, f(x).f^{-} dx = sec\, f(x) + c$

١٠) $\int csc\, f(x).cot\, f(x).f^{-} dx = csc\, f(x) + c$

⑧ $\int \frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{6} - 5}} \, dx$

⑨ $\int 3x(1-2x^2)^9 \, dx$

⑩ $\int 5 \sin^8(5x) \cdot \cos(5x) \, dx$

⑪ $\int \frac{1}{5x} \, dx$

⑫ $\int e^{18x} \, dx$

⑬ $\int x e^{8x^2} \, dx$

⑭ $\int \sin(8x) \, dx$

⑮ $\int x \cos(4x^2) \, dx$

الحل

① $\int [5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6x + 8] \, dx$

$= \int 5x^6 dx - \int 2x^4 dx + \int 3x^2 dx - \int 6x dx + \int 8 dx$

$= 5\frac{x^7}{7} - 2\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x$

② $\int \left[\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right] dx$

$= \int (2x^{-2} - 4x^{-3}) dx$

$= \int 2x^{-2} dx - \int 4x^{-3} dx$

$= 2 \frac{x^{-1}}{-1} - 4 \frac{x^{-2}}{-2} + C$

③ $\int \frac{4x^3 + 5x^2 - 8}{x^2} dx$

$\int (4x^3 + 5x^2 - 8) \cdot x^{-2} dx$

$= \int 4x + 5 - 8x^{-2} dx$

$= \int 4x dx + \int 5 dx - \int 8x^{-2} dx$

$= 4 \frac{x^2}{2} + 5x - 8 \frac{x^{-1}}{-1} + C$

④ $\int \left(\sqrt{x} - 8\sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$

$\int \left(x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$

$\int (x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{2}{3}} + 5x^{-\frac{1}{2}}) dx$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 8 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 5 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{24}{5} x^{\frac{5}{3}} + 10 x^{\frac{1}{2}} + C$

⑤ $\int (x^2+3x-5)^8 (2x+3)\,dx$

$\longrightarrow 2x+3$ نعمل

$\int (x^2+3x-5)^8\,dx$

$= \dfrac{(x^2+3x-5)^9}{9} + C$

⑥ $\int \sqrt{3x-2}\,dx \Rightarrow \int (3x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\longrightarrow (3)$

$\frac{1}{3}\int (3x-2)^{\frac{1}{2}}\underbrace{(3)}_{\text{نعمل}}\,dx$

$\frac{1}{3}\cdot\dfrac{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\cdot(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C$

⑦ $\int (3x^2-9x+1)^6 (2x-3)\,dx$

$\longrightarrow (6x-9)$

$\underline{3}\,(\underbrace{2x-3}_{\text{نعمل}})$

$\frac{1}{3}\int (3x^2-9x+1)^6\,dx$

$= \frac{1}{3}\cdot\dfrac{(3x^2-9x+1)^7}{7} + C$

⑧ $\int \frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{6}-5}}\,dx \Rightarrow \int x^2\left(\frac{x^3}{6}-5\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

$\hookrightarrow \frac{\frac{1}{3}x^2}{\frac{6}{2}}$ نقل $= \frac{1}{2}x$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \int \frac{1}{2}x^2\left(\frac{x^3}{6}-5\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2 \cdot \frac{\left(\frac{x^3}{6}-5\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 4 \cdot \left(\frac{x^3}{6}-5\right)^{\frac{1}{2}} + C$

$= 4 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{6}-5} + C$

⑨ $\int 3x(1-2x^2)^9\,dx$

$\hookrightarrow -4x$ نقل

$-\frac{3}{4}\int (1-2x^2)^9\,dx$

$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{(1-2x^2)^{10}}{10} + C \Rightarrow -\frac{3}{40}(1-2x^2)^{10} + C$

⑩ $\int 5 \sin^8(5x) \cdot \cos(5x)\,dx$

$= \int 5 \sin^8(5x) \cdot \cos(5x)\,dx$

$= \frac{\sin^9(5x)}{9} + C$

⑪ $\int \frac{1}{5x}\,dx$

$= \frac{1}{5} \ln(5x) + C$

(12) $\int e^{18x}\,dx$

$= \frac{1}{18}\int e^{18x}\,\underset{\text{نعمل}}{18}\,dx = \frac{1}{18}\cdot e^{18x} + C$

(13) $\int x\,e^{8x^2}\,dx \longrightarrow 16x \rightarrow$ نعمل

$\frac{1}{16}\cdot\int e^{8x^2}\cdot 16x\,dx$

$\frac{1}{16}\cdot e^{8x^2} + C$

(14) $\int \sin(8x)\,dx$

$\hookrightarrow 8$

$-\frac{1}{8}\int \sin(8x)\,dx$

$-\frac{1}{8}\cdot\cos(8x) + C$

(15) $\int x\cos(4x^2)\,dx \Longrightarrow 8x \rightarrow$ نعمل

$\frac{1}{8}\int 8x\cdot\cos(4x^2)$

$= \frac{1}{8}\cdot\sin(4x^2) + C$

التكامل المحدد

يمكن توضيح طريقة ايجاد التكامل المحدد بالامثلة التالية

① $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$

قيمة ثابتة معدومة على $\infty = 0$

$= [e^{x}+c]_{-\infty}^{0} = [e^{0}+c] - [e^{-\infty}+c]$

$= 1 + \cancel{c} - \frac{1}{e^{\infty}} + \cancel{c}$

$= 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 = \boxed{1}$

② $\int_{0}^{1} \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx \Longrightarrow \int_{0}^{1} 3x(1+3x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$\hookrightarrow 6x \rightarrow 2(3x)$ تعمل

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1+3x^2)^{-\frac{1}{2}}\,6x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+3x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{1} = \left[(1+3x^2)^{\frac{1}{2}}+c\right]_{0}^{1}$

$= \left[1+3(1)^{\frac{1}{2}}+c\right] - \left[1+3(0)^{\frac{1}{2}}+c\right] = \sqrt{4}+\cancel{c}-\sqrt{1}-\cancel{c}$

$= \sqrt{4}-\sqrt{1} = 2-1 = \boxed{1}$

$(4)^{\frac{1}{2}}$ $\quad 4+\cancel{c}-1-\cancel{c}$

$(2^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad 2-1 = \boxed{1}$

$\int_{2}^{4}(x^2+5x-7)\,dx$

$\int_{1}^{3}\left(\frac{2}{x^3}-x^4+\frac{1}{x}\right)dx$

التكامل بالتجزئة

سبق وان تعرفنا على عدة قواعد لايجاد قيمة التكامل وهذة القواعد هي استنتاج مباشر للقواعد المشتقة ولكن رغم ذلك فلا يزال هنالك الكثير من الدوال التي ليس بالامكان تكاملها بالاعتماد على هذة القواعد

لذا فقد وجدت طرق جديدة لايجاد قيمة التكامل من اهم هذة الطرق التكامل بالتجزئة والغرض تكامل الدالة لقسمتها الى جزئين الجزء الاول قابل للاشتقاق ونطلق عليه u والجزء الثاني قابل للتكامل ونطلق عليه dv ثم نستخدم قانون التالي:-

$$\int \mathrm{udv} = u.v - \int vdu$$

مثال Integrate each of the following:

① $\int \underbrace{Ln(X)}_{u} \underbrace{dX}_{dv}$

$u = Ln(X) \Rightarrow \frac{du}{dX} = \frac{1}{X} = du = \frac{1}{X} dX$

$dv = dX$

$\int dv = \int dX = v = X$

$\int u dv = u.v - \int v du$

$\int Ln(X) dX = Ln(X).X - \int X.\frac{1}{X} dX$

$= Ln(X).X - \int dX$

$= Ln(X).X - X + C$

② $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv}$

$u = x$

$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = 1\,dx$

$dv = e^x dx$

$\int dv = \int e^x dx$

$v = e^x$

$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$\int x e^x dx = x.e^x - \int e^x dx$

$= x.e^x - e^x + C$

③ $\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv}$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \quad = v = e^x$

$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$\int x^2 e^x dx = x^2.e^x - \int e^x 2x\,dx \leftarrow ①$

$x^2 e^x dx = x^2.e^x + 2x e^x + 2e^x + C$

$\int e^x.2x\,dx \quad dv = e^x dx \Rightarrow dv = e^x$

$u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx$

$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$\int e^x.2x\,dx = 2x.e^x - \int e^x 2\,dx$

$= 2x.e^x + 2e^x$ —— ①

التكامل العددي (طريقة سمبسون)

Numericl Integration (Simpson method)

تستخدم هذة الطريقة لحساب قيمة تقريبية للتكامل

$$\int_a^b f(x)dx$$

في هذة الطريقة نقسم الفترة (a,b) الى عدد زوجي من التقسيمات المتساوية البعد بواسطة النقاط (x0,x1,x2,x3,x4,.....,xn)

X0=a

X1=a+h

X2=a+2h

Xi=a+ih

Xn=a+nh

$$h = \frac{b-a}{n}$$

حيث ان n تمثل عدد التقسيمات ويجب ان يكون عددا زوجيا

Y=f(xi) , i=0,1,2,3.....,n

ويمكن ايجاد قيمة التكامل من القانون التالي :-

$$A = \frac{h}{3}\left[y0 + 4y1 + 2y2 + 4y3 + 2y4 + 4y5 + \cdots yn\right]$$

$$A = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} WiYi$$

قانون لايجاد قيمة التكامل بطريقة سمبسون

Ex:-Find the valuo of the following integration by using simpson method if you know that n=4

$$\int_0^2 2(x)dx$$

Sol:- **a=0 ,b=2 ,n=4**

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

i	xi	Yi=2xi	wi	wiyi
0	a=0	0	1	0
1	0+0.5	1	4	4
2	1	2	2	4
3	1.5	3	4	12
4	2	4	1	4
				24

$$A = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n} WiYi$$

=0.5\3*24=4

Ex:-Find the valuo of the following integration by using simpson method if you know that n=4

$$\int_0^2 x^2 dx$$

Sol:- a=0 ,b=2 ,n=4

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

i	xi	Yi=xi^2	wi	wiyi
0	0	0	1	0
1	0.5	0.25	4	1
2	1	1	2	2
3	1.5	2.25	4	9
4	2	4	1	4
				16

$$A = \frac{h}{3}\sum WiYi$$

=0.5\3*16=2.666

x:-Find the valuo of the following integration by using simpson method if you know that n=6

$$\int_0^2 x^2 dx$$

Sol:- a=0 ,b=6 ,n=6

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$

i	xi	Yi=xi^2	wi	wiyi
0	0	0	1	0
1	1	1	4	4
2	2	4	2	8
3	3	9	4	36
4	4	16	2	32
5	5	25	4	100
6	6	36	1	36
				216

$$A = \frac{h}{3}\sum WiYi$$

=1\3*216=72

الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما يتي:

١ – ان التكامل الدالة $Sx^m dx$ هو:

أ – $\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$

ب – $\frac{x^{m-1}}{m-1} + c$

ج – $\frac{x^m}{m} + c$

٢ – ان قيمة التكامل المحدود التالي : $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ تساوي:

أ – تساوي صفر

ب - تساويواحد

ج – تساوي ∞

٣ – ان قانون التكامل بالتجزئة هو :

أ - $\int sudv = u.v - \int svdu$

ب - $\int sudv = u.v - \int sudv$

ملاحظة :-

- لكل سؤال درجة واحدة
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت لاتحتاج الى دراسة هذة الوحدة النمطية انتقل الى الوحدة النمطية اللاحقة .
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت تحتاج الى الاستمرار في دراسة هذة الوحدة النمطية
- تحقق من اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة النمطية

المصادر والمراجع

١- الرياضيات –طرق عددية –تاليف :- د. علي سيفي

سرمد زكو

٢- اسس الرياضيات –تاليف :- د. هادي جابر مصطفى

د. رياض شاكر نعوم

د. نادر جورج منصور

٣- الرياضيات الحديثة- تاليف :- عبد الفتاح الشرقاوي

محمود زناتي

نبيه غبد الغفار

احمد فرغلي

مفاتيح الاجابات على الاختبارات

الاختبارات القبلية		**الاختبارات البعدية**	
١	**أ**	**١**	**أ**
٢	**ج**	**٢**	**ب**
٣	**أ**	**٣**	**أ**