الاستكمال - متعدد الحدود

الوحدة النمطية الخامسة

(٥)

اعداد وتصميم

وفاء كامل ابراهيم ال طه

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

هيئة التعليم التقني

معهد الادارة التقني

مادة الرياضيات

لطلبة المرحلة الاولى \قسم انظمة الحاسبات

في معاهد هيئة التعليم التقني

اعداد وتصميم

وفاء كامل ابراهيم ال طه

النظرة الشاملة

الفئة المستهدفة

طلبة المرحلة الاولى/قسم انظمة الحاسوب /معهد الادارة التقني

المبررات

صممت هذه الوحدة النمطية لتمكين الطالب من التعرف على الاستكمال باستخدام متعدد الحدود –صيغة نيوتن الامامية - ايجاد جذر المعادلة بطريقة الاعادة (التكرار) – طريقة القاطع – طريقة نيوتن – ايجاد جذر المعادلة بطريقة نيوتن –رافسون

الفكرة المركزية

- الاستكمال باستخدام متعدد الحدود
- –صيغة نيوتن الامامية
- ايجاد جذر المعادلة بطريقة الاعادة (التكرار)
- – طريقة القاطع
- – طريقة نيوتن– رافسون

التعليمات

- ادرس محتويات الوحدة النمطية جيدا
- تعرف على اهداف الوحدة النمطية جيدا
- اد الاختبار بشكل جيد
- لاتحاول الاطلاع على مفاتيح الاجابة على الاختبار الابعد تاديتها
- قم باداء الاختبار القبلي
- يحتوي الاختبار القبلي على ثلاث فقرات اختبارية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت تحتاج الى درارسة هذه الوحدة النمطية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت لاتحتاج الى الاستمرار في دراسة هذه الوحدة النمطية
- بعد دراستك للوحدة النمطية قم باداء لاختبار البعدي
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانتقل الى دراسة الوحدة النمطية التالية
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فاننا نعلمك بحاجتك لدراسة هذه الوحدة النمطية

الاهداف الادائية

سيكون الطالب بعد انتهائه من دراسة هذه الوحدة النمطية قادرا على ان:

- يتعرف علىالاستكمال باستخدام متعدد الحدود

– يحدد صيغة نيوتن الامامية

- يتعرف على كيفية ايجاد جذر المعادلة بطريقة الاعادة (التكرار)
- يتعرف على كيفية ايجاد جذر المعادلة بطريقة القاطع

– يتعرف على كيفية ايجاد جذر المعادلة بطريقة نيوتن –رافسون

<u>الاختبار القبلي</u>

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي:

١- اذا كانت البيانات تمثل علاقة خطية فتسمى هذا التمثيل ب:-

أ-الاستكمال اللاخطي

ب- الاستكمال الخطي

٢- ان قيم $\Delta^2 f(x)$ نحصل عليها من :-

أ- حاصل طرح قيمتين متتاليتين من قيم $\Delta f(x)$

ب- حاصل ضرب قيمتين متتاليتين من قيم $\Delta f(x)$

ج - حاصل جمع قيمتين متتاليتين من قيم $\Delta f(x)$

٣- طريقة نيوتن – رافسون تستخدم لايجاد :-

أ- جذور المعادلات الخطية

ب- جذور المعادلات اللاخطية

<u>ملاحظة :-</u>

- ❖ لكل سؤال درجة واحدة
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت لاتحتاج الى دراسة هذة الوحدة النمطية انتقل الى الوحدة النمطية اللاحقة .
- ❖ اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت تحتاج الى الاستمرار في دراسة هذة الوحدة النمطية
- ❖ تحقق من اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة النمطية

<u>عرض الوحدة النمطية</u>

الاستكمال ومتعدد الحدود Interpolating & Polynomials

من المسائل المهمة جدا والتي تواجهنا في الحياة العملية هي ايجاد قيم غير معلومة على ضوء قيم او بيانات معلومة لمجموعة من الملاحظات التي قد تكون ماخوذة من التجربة العملية

سنقوم في هذا الفصل بايجاد دالة او متعدد لحدود يمثل بيانات الجدولية المتوفرة لدينا احسن تمثيل الغاية من تمثيل هذة البيانات الجدولية (xi , yi) على سبيل المثال هو معرفة سلوك الدالة من خلال تمثيل هذة البيانات وكذلك ايجاد بعض القيم الاخرى التي قد يصعب ايجادها والحصول عليها من التجربة العملية

ويسمى ايجاد هذة القيم ضمن فترة البيانات المعطاة وخارجها بالاستكمال Interpolating

فاذا كانت البيانات تمثل علاقة خطية فان تمثيلها سيكون لمتعدد الحدود من الدرجة الاولى ويسمى هذا التمثيل بالاستكمال الخطي Linear Interpolating

اما اذا كانت البيانات تمثل علاقة خطية فان تمثيلها سيكون لمتعدد الحدود من الدرجة العليا ويسمى هذا التمثيل بالاستكمال اللاخطي Non Linear Interpolating

جداول الفروق Difference table

سنبدا اولا بتوضيح فكرة الموضوع من خلال جدول البيانات التالي والذي نوضح فيه كيفية تكوين جداول الفروق ايضا:-

X	F(x)
0	1
1	5
2	29
3	91
4	209
5	401

نبدا اولا من العمود الذي يمثل x والعمود الذي يمثل قيم f(x) نكون جدول الفروق التالي :-

جدول الفروق (Difference table)

X	F(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	1				
1	5	4	20	18	
2	29	24	38	18	0
3	91	62	56	18	0
4	209	118	74		
5	401	192			

من ملاحظة الجدول السابق نجد ان كل عمود الى اليمين ناتج من حاصل طرح قيمتين متتاليتين من قيم العمود f(x) وكذلك بالنسبة للعمود الذي يمثل القيم $\Delta^2 f(x)$

نجد ان البيانات الناتجة من حاصل طرح قيمتين متتاليتين من قيم العمود $\Delta f(x)$ وهكذا بالنسبة للاعمدة التي تضم القيم $\Delta^4 f(x)$،$\Delta^3 f(x)$

ومن الملائم ان نفرض $\Delta x=h$

استكمال متعدد الحدود **Interpolating Polynomials**

صيغة نيوتن –كريكوري Newton-Gregory

ويتضمن موضوعنا دراسة ابسط الطرق لتمثيل البيانات لاية ظاهرة تاخذ القيم :-

(x_i, f_i) $i=1,2,3,4,\ldots,n+1$

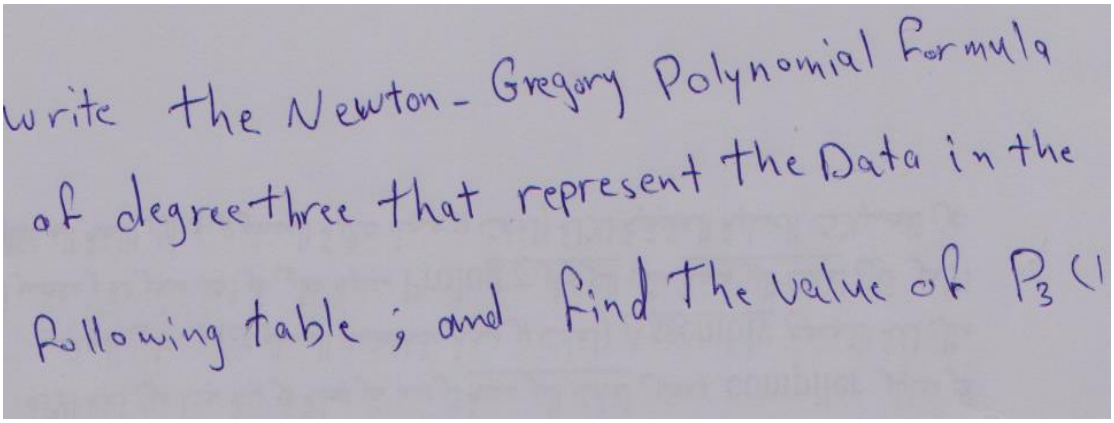
بمتعدد الحدود من الدرجة n والذي يمر عبر مجموعة النقاط (n+1) مع ملاحظة ان متعدد الحدود هذا يكون وحيدا حيث انه يوجد متعدد الحدود وحيد (unique) يمر عبر (n+1) من النقاط وربما ابسط تمثيل لمتعدد الحدود هو صيغة نيوتن – كريكوري للفروقات الامامية

Newton-Gregory forword polynomial

والذي يمر من النقاط ذات المسافات المتساوية والصيغة العامة له :-

$$P_n(x)=f_0+\frac{1}{1!h}(x-x)\Delta f_0+\frac{1}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{1}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots+(x-x_n)\Delta^n f_0\ldots$$

عندما تكون $s=\frac{x-x_0}{h}$



X	$f(x) = y$
0	1
1	5
2	29
3	91
4	209
5	401

Sol:- الفروق كما يلي

X	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	1				
		4			
1	5		20		
		24		18	
2	29		38		0
		62		18	
3	91		56		0
		118		18	
4	209		74		
		192			
5	401				

$$P_3(x) = f_0 + \frac{1}{1!h}(x - x_0)\Delta f_0 + \frac{1}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 f_0 +$$

$$+ \frac{1}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 f_0$$

$$= 1 + \frac{1}{1(1)}(x - 0)(4) + \frac{1}{2(1)^2}(x - 0)(x - 1)(20)$$

$$+ \frac{1}{6(1)^3}(x - 0)(x - 1)(x - 2)(18)$$

$$= 1 + 4x + \frac{1}{2}(20x^2 - 20x) + \frac{1}{6}(x(x^2 - x - 2x + 2))18$$

$$= 1 + 4x + 10x^2 - 10x + 3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x$$

$$= 3x^3 + x^2 + 1$$

المطلوب الثاني

$$P_3(1.5) = 3(1.5)^3 + (1.5)^2 + 1$$

$$= 10.125 + 2.25 + 1$$

$$= 13.375$$

صيغة نيوتن للفروق الخلفية Newton's Backward formula

لايجاد القيمة التقريبية ل f(x) عندما تكون x قرب نهاية الجدول او (x_n , x_{n-1})

فاننا نستخدم صيغة نيوتن الخلفية حيث ان القيمة التقريبية تكون اقرب الى القيمة الحقيقية من صيغة نيوتن الامامية وان هذة الصيغة مشلابهة للصيغة السابقة (صيغة نيوتن الامامية) بالتعويض عن Δ ب ∇

وان هذة الصيغة يمكن كتابتها كما يلي :-

$$+ \; Q(x) = y_n + (x - x_n)\frac{\nabla y_n}{1!h}$$

(x

$$x_n)(x - x_{n-1})\left(\frac{\nabla^2 y_n}{2!h}\right) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots . + (x -$$

$$x_1)\frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}$$

Ex:- for the following table find f(9) by using Newton's backword formula

X	4	6	8	10
Y=f(x)	1	3	8	20

Sol:-

نجد اولا جدول الفروق الخلفية وكما يلي :-

X	$y=f(x)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

$\boxed{h=2}$

بتطبيق صيغة نيوتن الخلفية :

$$Q(x)=f(x)=y_3+(x-x_3)\frac{\nabla y_3}{h}+(x-x_3)(x-x_2)\frac{\nabla^2 y_3}{2!\,h^2}+(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)\frac{\nabla^3 y_3}{3!\,h^3}$$

$$=20+(x-10)\frac{12}{2}+(x-10)(x-8)\frac{7}{2(2)^2}+(x-10)(x-8)(x-6)\frac{4}{3!\,2^3}$$

$$=20+6(x-10)+\frac{7}{8}(x-10)(x-8)+\frac{4}{48}(x-10)(x-8)(x-6)$$

$$f(9)=20+6(9-10)+\frac{7}{8}(9-10)(9-8)+\frac{4}{48}(9-10)(9-8)(9-6)=\frac{103}{8}=12.875$$

حل المعادلات اللاخطية Non-Linear equations

ايجاد جذر المعادلة بطريقة الاعادة (التكرار) Interetive method

في هذا الفصل سوف نتطرق الى بعض الطرق الاساسية في موضوع التحليل العدديوهي ايجاد قيم المتغير x الذي يحقق المعادلة f(x) =0 للدالة المعرفة f ويسمى هذا الحل لهذه الانواع من الدوال والمعادلات اللاخطية بجذر المعادلة f(x) =0 ولعل هذا النوع من الطرق او الحلول التي سوف نتطرق لها تعتبر من اقدم الطرق العددية لحل المعادلات اللاخطية ومع ذلك فلا زال البحث مستمرا لايجاد طرق انسب وادق وحتى الوقت الحاضر

الطرق التي سوف نتطرق لها تبدا بكل من طريقة التكرار Interetive method

وطريقة نيوتن – رافسون Newton – Raphson

وحيث اساسيات هذة الطريقة تعود الى زمن اسحق نيوتن وتنتهي ببعض الطؤرق الحديثة والتي تطورت ايضا بتطور الحاسبة الالكترونية .

طريقة التكرار او الاعادة Interetive method

تعتبر هذة الطريقة من ابسط الطرق المستخدمة لايجاد جذور المعادلات اللاخطية والتي تتضمن متغير مستقل واحد حيث تبدا هذة الطريقة باخذ قيمة اولية (x0) ثم يجري العمل على تطويرها وتحسينها باتجاة الحل الصحيح وذلك بالاعادة والتكرار

لنبدا لولا بكتابة المعادلة التي يرادايجاد احد جذورها بالشكل العام التالي :-

١) ..... f(x)=0

لايجاد احد جذور المعادلة بطريقة التكرار نبدا باعادة ترتيب المعادلة اعلاه بحيث ناخذ الصيغة التالية :-

٢) ..... x=g(x)

حيث ان g(x) دالة جديدة تختلف عن f(x) وبما ان الطريقة تكرارية فيفضل ان تاخذ الصيغة التكرارية الاتية :-

٣) ..... $x_{i+1} = g(x_i) \quad , i = 0,1,2,3 \ldots \ldots$

نبدا باخذ القيمة التخمينية الاولية (x0) ونجد (x1) وذلك بالتعويض في المعادلة (٣) اي نجد (x1) من المعادلة

$$X1=g(x0)$$

ولغرض التاكد من احتمال كون (x1) تمثل جذر المعادلة نقوم بتعويضها في المعادلة (١) فاذا حققت هذة القيمة المحسوبة المعادلة $f(x1) =0$

يكون جذر المعادلة المطلوب هو $(x^*=x1)$ عندها نتوقف عن التكرار وان لم يكن (x1) جذرا للمعادلة فعلينا ان نعيد الخطوات كما يلي :-

$$X_2=g(x_1)$$

$$X_3=g(x_2)$$

.

.

.

$$X_i=g(x_i) \quad , \quad i= 0,1,2,3,\ldots\ldots$$

وعندما تتقارب النتائج مع بعضها اي ان (xi) تقترب من جذر المعادلة (x^*) وهذا يعني ان الفرق بين x_{i+1} , x_i يصبح صغيرا جدا ويقترب من الصفر بزيادة عدد التكرارات n وعندها تكون $(x^*=x_{i+1})$ اي ان :-

$$|x^* - x_i| < \in \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٤$$

حيث ان E كمية صغيرة جدا واختيارية وبصورة اوضح تكتب :-

$$\lim_{i\to\infty}(x^* - x_i) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (٥$$

او

$$\lim_{i\to\infty} x^* - \lim_{i\to\infty} x_i = 0$$

او

$$x^* = \lim_{i\to\infty} x_i$$

وهذا يعني انه عندما تكون (i) كبيرة جدا فان (x_i) تقترب من (x^*) وهذا

يعني ان $(x^*=x_{i+1})$ وبالتعويض عن هذة القيكمة في معادلة رقم (٥) نحصل على :-

٦) $\lim_{i\to\infty}(x_{i+1} - x_i)=0$.....

يفسر هذا الشرط المهم التقارب convergent والحصول على جذر المعادلة بانه عندما تكون (i) كبيرة جدا وتقترب من (∞) يكون الفرق بين (xi) و (x_{i+1}) يساوي صفرا وبشكل عام ولغرض التاكد من ان جذر المعادلة هو $(x^*=x_{i+1})$ يجب دائما ان نعوض في المعادلة f(x)=0

لناخذ المثال التالي لنوضح الطريقة :-

Solve the following non-linear equation by using Iterative method

طريقة الاعادة او التكرار

if you know that $X_0=1.5$, and $X_0=6$

$f(x)=X^2-5X+4=0$

sol

$X^2-5X+4=0$

$(X-4)(X-1)=0$ وبحل المعادلة نحصل على جذور المعادلة

$X^*=4$, $X^*=1$

وباستخدام الصيغة التكرارية (3)

$X_{i+1}=g(X_i)$, $i=0,1,2,\ldots$

ويمكن اختيار $g(X)$ كما يلي:

$X^2-5X+4=0$

$5X=X^2+4$

$X=\frac{X^2+4}{5}$

$X_{i+1}=\frac{X_i^2+4}{5}$

وعند اختيارنا القيمة الأولية $X_0=1.5$ فاننا نحصل على:

$X_1=\frac{X_0^2+4}{5}=\frac{(1.5)^2+4}{5}=1.25$

$$X_2 = \frac{X_1^2+4}{5} = \frac{(1.25)^2+4}{5} = 1.1125$$

وبنفس الطريقة نحصل على ،

$$X_3 = 1.04750$$

$$X_4 = 1.00780$$

$$\vdots$$

$$X_{12} = 1.00000$$

نلاحظ انه باختيارنا القيمة الاولية ($x_0=1.5$) فان نتائج العمليات التكرارية تتقارب من بعضها بالتعاقب وتقترب من جذر المعادلة الاول ($x^*=1.0$) بعد (١٢) تكرار ولحد خمس مراتب عشرية بعد الفارزة

ولايجاد الجذر الثاني ($x^*=4$) على فرض ان القيمة الاولية المختارة هي ($x_0=6$_) نجد ان :-

$$X_1 = \frac{6^2+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$X_2 = \frac{8^2+4}{5} = \frac{68}{5} = 13.5$$

$$X_3 = \frac{(13.5)^2+4}{5} = \frac{182.25+4}{5} = 37.25$$

نلاحظ ان باختيارنا القيمة الاولية ($x_0=6$_) فان نتائج العمليات التكرارية بدات تبتعد عن بعضها واخذ الحل يبتعد عن عن جذر المعادلة ($x^*=4$)

نستنتج انه هناك خطا في اختيارنا القيمة الاولية ($x_0=6$_) وهذا يتطلب منا دراسة كيفية اختيار القيمة الاولية المناسبة التي تؤدي الى تقارب النتائج العمليات التكرارية لطريقة التكرار .

ايجاد جذر المعادلة بطريقة نيوتن - رافسون Newton – Raphson method

سنوضح الان طريقة اخرى لايجاد جذور المعادلات اللاخطية ذات المتغير المستقل الواحد وهي طريقة نيوتن – رافسون

لايجاد جذور المعادلات اللاخطية وهي بالاساس مشابهة لطريقة التكرارات التي تم شرحها سابقا فيما عدا ان الصيغة التكرارية $x=g(x)$ يتم اختيارها بشكل يضمن ان تكون $g^{-}(x)$ مساوية للصفر عند جذر المعادلة x^{*} ويكم كتابته الصيغة العامة لهذة الطريقة بالشكل الاتي :-

$$x_1 = x_0 - \Delta x$$

$$f^{-}(x_0) = \frac{f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = \frac{f(x_0)}{f^{-}(x_0)}$$

$$-\frac{f(x_0)}{f^{-}(x_0)} x_1 = x_0$$

وبشكل عام عندما تكون القيم تكرارية نكتب :-

$$-\frac{f(x_i)}{f^{-}(x_i)} x_{i+1} = x_i \qquad ; i= 1,2,3,$$

والتي هي الصيغة العامة لطريقة نيوتن – رافسون التكرارية

مثال

استخدم طريقة نيوتن - رافسون التكرارية لإيجاد جذور المعادلة

$$f(X) = X^3 + 4X^2 - 10 = 0$$

افرض ان $X_0 = 1.5$

EX

— find the roots of the following equations by using Newton-Raphson method

If you know that $X_0 = 1.5$

$$f(X) = X^3 + 4X^2 - 10$$

Sol

صيغة نيوتن - رافسون هي:

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

نجد أولاً $f'(X)$ من المعادلة:

$$f(X) = X^3 + 4X^2 - 10$$

$$f'(X) = 3X^2 + 8X$$

وبالتعويض بالصيغة العامة لنيوتن - رافسون نحصل على:

$$X_{i+1} = X_i - \frac{X_i^3 + 4X_i^2 - 10}{3X_i^2 + 8X_i}$$

وعندما نختار $X_0 = 1.5$ نجد ان:

i	X_i
0	$X_0 = 1.5$
1	$X_1 = 1.37333$
2	$X_2 = 1.36526$
3	$X_3 = 1.36523$
4	$X_4 = 1.36523$

نستنتج ان جذر المعادلة هو $X^* = X_3 = 1.36523$

وهو صحيح لخمسة مراتب عشرية بعد الفارزة نجد ان هذه النتيجة جيدة التي تم الحصول عليها بعد ثلاث تكرارات كانت بسبب استخدامنا الجيد واختيارنا الجيد والصحيح للقيمة الاولية X_0 ان الاختيار غير الجيد قد يؤخر الحصول على النتائج مما يزيد من عدد التكرارت او قد تبتعد النتائج عن بعضها بحيث لا نحصل على الحل المطلوب

ايجاد جذر المعادلة بطريقة القاطع Secant method

من الملاحظ في تصنيف الفترات بطء عملية التقارب الى الجذر المطلوب فاذا كانت القيمة المطلوبة للجذر بدقة عالية علينا تكرار الطريقة عددا كبيرا من المرات وذلك يتطلب اجراء عدد كبير من العمليات الحسابية وبالتالي زمن حسابي كبير لذلك اصبح من الضروري ايجاد طرائق ذات تقارب اسرع للجذر وتعتبر طريقة القاطع احدى هذة الطرق وذلك باستخدام الصيغة التالية :-

$$X_n = X_{n+1} - \frac{f(x_n)[x_n - x_{n-1}]}{f(x_n) f(x_{n-1})} \qquad ,n=1,2,3.....$$

:-

Find the roots of the following equation by Using (Secant method) if you Know that $X_1=5$; $X_2=4$

ا:-

اولاً نأخذ $X_1=5$, $X_2=4$

$F(X)=X^2-X-6$

ثم نستخدم القانون التالي لايجاد المتتابعة Xn :-

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)[x_n - x_{n-1}]}{f(x_n) f(x_{n-1})}$$

ان الجدول التالي يوضح الحسابات التي اجريت بهذا الخصوص

n	Xn	f(X) $=X^2-X-6$
1	5	14 (5^2-5-6)
2	4	6 (4^2-4-6)
3	3.25	1.3125
4	3.04	0.2016
5	3.001890359	$9.45536 89 * 10^{-3}$
6	3.000014997	$7.49857 * 10^{-5}$
7	3.000000006	$2.75 * 10^{-8}$
8	3	0 (3^2-3-6)

من الجدول نلاحظ ان X8=3 هو جذر المعادلة لان f(X8)=0

توضيح:- ان قيمة $X_3=3.25$ حصلنا عليها من تطبيق القانون السابق

$$X_3 = 4 - \frac{6(4-5)}{6-14}$$

$$4- \frac{-6}{-8}=4- 0.75=3.25$$

اما قيم $f(X_i)$ فنحصل عليها من تعويض قيم X_i في المعادلة

$$F(x) =X^2-X-6$$

الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الحرف الذي يسبق الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي:

١- اذا كانت البيانات تمثل علاقة خطية فتسمى هذا التمثيل ب:-

أ- الاستكمال الخطي

ت- الاستكمال اللاخطي

٢- طريقة نيوتن – رافسون تستخدم لايجاد :-

أ- جذور المعادلات الخطية

ب- جذور المعادلات اللاخطية

٣- ان قيم $\Delta^2 f(x)$ نحصل عليها من :-

أ- حاصل جمع قيمتين متتاليتين من قيم $\Delta f(x)$

ب- حاصل ضرب قيمتين متتاليتين من قيم $\Delta f(x)$

ج - حاصل طرح قيمتين متتاليتين من قيم $\Delta f(x)$

ملاحظة :-

- لكل سؤال درجة واحدة
- اذا حصلت على (٢) درجة فاكثر فانت لاتحتاج الى دراسة هذة الوحدة النمطية انتقل الى الوحدة النمطية اللاحقة .
- اذا حصلت على (٢) درجة فاقل فانت تحتاج الى الاستمرار في دراسة هذة الوحدة النمطية
- تحقق من اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة النمطية

المصادر والمراجع

١- الرياضيات –طرق عددية –تاليف :- د. علي سيفي

سرمد زكو

٢- اسس الرياضيات –تاليف :- د. هادي جابر مصطفى

د. رياض شاكر نعوم

د. نادر جورج منصور

٣- الرياضيات الحديثة- تاليف :- عبد الفتاح الشرقاوي

محمود زناتي

نبيه غبد الغفار

احمد فرغلي

٤ – البرمجة والتحليل العددي – تاليف :- د . خالد عبد الرحمن حسين

د . موفق محمد القصاب

مفاتيح الاجابات على الاختبارات

الاختبارات القبلية		**الاختبارات البعدية**	
١	**ب**	**١**	**أ**
٢	**أ**	**٢**	**ب**
٣	**ب**	**٣**	**ج**